

Elektronen ergeben sich bei dieser Zuordnung insofern Schwierigkeiten, als der dazwischenliegende 2^2B_2 -Term im Gegensatz zu den Ergebnissen der MO-Methode eine recht große Oszillatorstärke von $f \approx 0,3$ haben sollte, so daß er bei den Absorptionsversuchen ebenfalls hätte gefunden werden müssen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die hier nicht berücksichtigte Elektronenwechselwirkung die Verteilung der Oszillatorstärken auf 2^2B_2 und 3^2B_2 in der oben schon diskutierten Weise so verändert, daß $f_{2^2B_2} \leftarrow 1^2B_2 \ll f_{3^2B_2} \leftarrow 1^2B_2$ werden könnte. Der vierte berechnete Term 3^2B_2 endlich hat zwar

nach beiden Methoden eine sehr große Oszillatorstärke, dürfte aber durch die erste Toluolabsorption bei 37500 cm^{-1} überdeckt werden und daher nur schwierig experimentell zu finden sein.

Die zufriedenstellende Übereinstimmung, die sich bei dem hier durchgeführten Vergleich zwischen den verschiedenen Näherungsverfahren einerseits und zwischen denselben und den spektroskopischen Ergebnissen für das Benzylradikal andererseits ergibt, läßt erwarten, daß solche Berechnungen auch für andere aromatische Radikale erfolgversprechend sind.

Zur Theorie der magnetischen Sperrschicht in Halbleitern

Von O. MADELUNG, L. TEWORDT und H. WELKER

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen

(Z. Naturforsch. **10a**, 476—488 [1955]; eingegangen am 31. März 1955)

Im Anschluß an frühere Arbeiten¹ wird die Theorie der magnetischen Sperrschicht in Eigenhalbleitern entwickelt und geschlossen dargestellt. Insbesondere wird die Dichteverteilung der Elektron-Loch-Paare unter dem Einfluß der gekreuzten Felder sowie die Strom-Spannungs-Kennlinie und ihre Abhängigkeit von den verschiedenen maßgebenden Größen wie Oberflächenrekombination und Dimensionierung der Probe untersucht. Schließlich werden Fragen wie Einfluß von Lichteinstrahlung, Frequenzverhalten, zeitlicher Auf- und Abbau der Sperrschicht und die Erweiterungsmöglichkeiten der vorliegenden Theorie behandelt.

1. Qualitatives Bild der magnetischen Sperrschicht

Wir fassen noch einmal kurz die wichtigsten qualitativen Züge des hier betrachteten Effektes zusammen:

Wird an einen Eigenhalbleiter ein elektrisches Feld E_x und senkrecht dazu ein Magnetfeld B_z angelegt, so werden durch die von den Feldern hervorgerufene Lorentz-Kraft Elektronen und Löcher in die gleiche Richtung abgelenkt. Ist in Ablenkungsrichtung infolge freier Oberflächen ein Ladungstransport nicht möglich, so können trotzdem Teilchenströme von Elektronen und Löchern in dieser Richtung fließen; diese müssen aber gleich groß sein, so daß wegen des entgegengesetzten Ladungsvorzeichens der Träger kein elektrischer Strom damit verbunden ist. Sind nun Volumen- und Oberflächenrekombination der Halbleiterprobe genügend klein, so werden sich beträchtliche Abweichungen der Elektron-Loch-Paardichte von ihrem Gleichgewichtswert n_i einstellen, da sich an

der einen Oberfläche Paare stauen und von der anderen Oberfläche her dauernd Paare weggetrieben werden. Dem dabei entstehenden Dichtegradienten wirken zwei Effekte entgegen, die ihn auszuglätten suchen:

- a) ein Diffusionsstrom, der in Richtung des negativen Dichtegradienten fließt,
- b) die Volumenrekombination von Elektronen und Löchern, die lokal die Dichteerhöhung bzw. -verarmung abzubauen sucht.

Die Randwerte der Dichteverteilung werden durch die Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten an den beiden freien Oberflächen bestimmt.

Im stationären Fall halten sich also vier Effekte die Waage, die charakterisiert sind durch die Größen $B_z E_x$ (Lorentz-Kraft), D (Diffusionskonstante für Elektron-Loch-Paare), τ (Volumenlebensdauer) und s (Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit). Ferner ist maßgebend für die Dichteverteilung die Dimensionierung der Halbleiter-Probe. Je nach Wahl der charakteristischen Parameter kann sich dabei eine (mittlere) *negative* Dichteabweichung von n_i einstellen (Widerstandsvergrößerung).

¹ H. Welker, Z. Naturforsch. **6a**, 184 [1951]; E. Weißhaar u. H. Welker, Z. Naturforsch. **8a**, 681 [1953].



rung) oder eine *positive* Dichteabweichung von n_i (Widerstandsverminderung).

2. Grundgleichungen und einschränkende Bedingungen

Gegeben sei ein quaderförmiger Halbleiter; in der x -Richtung sei er durch Elektroden, in der y - und z -Richtung durch freie Oberflächen begrenzt. Ferner liege in der x -Richtung ein elektrisches Feld E_x und in der z -Richtung ein Magnetfeld $B_z = B$ an. Zur Gewinnung der orts- und zeitabhängigen Elektronen- und Löcherdichte n bzw. p gehen wir aus von den Diffusionsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial n / \partial t &= -\operatorname{div} \vec{j}_n - U, \\ \partial p / \partial t &= -\operatorname{div} \vec{j}_p - U.\end{aligned}\quad (1)$$

\vec{j}_n und \vec{j}_p sind die Teilchenstromdichten der Elektronen bzw. Löcher, U ist die Volumenrekombinationsrate² pro Zeit- und Volumeneinheit der Elektronen und Löcher. Die Teilchenstromdichten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{j}_n &= -\mu_n n \vec{E} + \mu_n \mu_{nH} n [\vec{E} \vec{B}] - \mu_n \frac{kT}{e} \operatorname{grad} n, \\ \vec{j}_p &= +\mu_p p \vec{E} + \mu_p \mu_{pH} p [\vec{E} \vec{B}] - \mu_p \frac{kT}{e} \operatorname{grad} p.\end{aligned}\quad (2)$$

Hierin bedeuten μ die Drift- und μ_H die Hall-Beweglichkeiten. Die Gln. (2) gelten streng genommen nur im Falle isotroper Halbleiter und nicht zu großer Magnetfelder, doch reicht diese Näherung für unsere Zwecke aus.

Wir entwickeln die Theorie unter den folgenden einschränkenden Bedingungen:

a) *Eigenhalbleiter* (die thermische Gleichgewichtsdichte der Elektronen sei gleich derjenigen der Löcher: $n_0 = p_0 = n_i$). Abweichungen von dieser Annahme behandeln wir im Anhang 1.

b) *Quasineutralität, kleine Störstellendichten*. Die Bedingung der Quasineutralität ist in Halbleitern immer erfüllt außer in dünnen Randzonen unter der Oberfläche oder in p - n -Übergängen, sie darf also hier gemacht werden. Das bedeutet, daß Abweichungen δn der Elektronendichte und δp der Löcherdichte von ihren Gleichgewichtsdichten n_0 bzw. p_0 einander gleich sein müssen. Dieses gilt

aber nicht mehr, wenn Störstellen (Haftstellen) vorhanden sind, welche Elektronen bzw. Löcher eingefangen halten können. Wir gehen darauf im Anhang 2 ein. Es zeigt sich, daß für Störstellendichten, die klein gegen n_i sind, praktisch noch immer $\delta n = \delta p$ gilt. Zusammen mit a) führt das auf $n = p$.

c) *Verschwindende Oberflächenrekombination* an den Oberflächen in z -Richtung. Unter dieser Voraussetzung fließen keine Teilchenströme in z -Richtung, und n und p werden von z unabhängig. Da ferner in x -Richtung keine Dichtegradienten auftreten (die Elektronen und Löcher können ja in dieser Richtung ungehindert fließen), sind n und p allein von y abhängig. (Zur Durchführung der Theorie für kleine Dichteabweichungen unter Einbeziehung des Einflusses der Oberflächen in der z -Richtung vgl.³)

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich aus (1) und (2) nach Elimination von E_y die partielle Diff.-Gl. in t und y für die Elektron-Loch-Paardichte n :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{D}{y_d} \frac{\partial n}{\partial y} - U. \quad (3)$$

Hierin sind:

$$\begin{aligned}D &= \frac{kT}{e} \mu, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_p} \right), \\ \frac{1}{y_d} &= \frac{e}{kT} \frac{\mu_{nH} + \mu_{pH}}{2} B E_x.\end{aligned}\quad (4)$$

D ist die (ambipolare) Diffusionskonstante eines Diffusionsvorganges von Elektron-Loch-Paaren im Eigenhalbleiter⁴. Auf die physikalische Bedeutung von y_d gehen wir weiter unten ein.

Zu (3) kommen die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}j_{ny} = j_{py} &= -D \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{D}{y_d} n = +U_s \\ &\text{für } y = +b/2, \\ j_{ny} = j_{py} &= -D \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{D}{y_d} n = -U_s \\ &\text{für } y = -b/2.\end{aligned}\quad (5)$$

Dabei ist angenommen, daß die Oberflächen in der y -Richtung bei $y = +b/2$, $y = -b/2$ liegen und daß zu diesen Oberflächen die Rekombinationsquoten (pro Zeit- und Flächeneinheit) U_s bzw. U_s gehören.

² Wir bezeichnen im folgenden mit „Rekombinationsquote“ immer die Differenz zwischen der eigentlichen Rekombinationsquote und der Neuerzeugungsquote. U ist also bei Dichteüberhöhungen positiv, bei Dichteunterschreitungen dagegen negativ.

³ R. Landauer u. J. Swanson, Phys. Rev. **91**, 555 [1953].

⁴ W. van Roosbroeck, Phys. Rev. **91**, 282 [1953].

Für die Rekombinationsquoten machen wir die üblichen Ansätze:

$$U = \frac{\delta n}{\tau}, U_s = s \delta n, U_S = S \delta n, \delta n = n - n_i. \quad (6)$$

Im allgemeinen sind τ , s und S von der Dichteabweichung δn abhängig, aber für kleine δn gehen τ , s , S in die bekannten konstanten Lebensdauern der Elektronen und Löcher im Eigenhalbleiter bzw. die konstanten Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten über. Wir werden im folgenden die Theorie entwickeln unter der Annahme τ , s , $S = \text{const}$ auch für große Dichteabweichungen δn , erst im Anhang 3 gehen wir auf nichtlineare Rekombinationsgesetze ein.

3. Dichteverteilung im stationären Zustand

Im stationären Fall erhält man aus (3), (5) und (6) als Diff.-Gl. und Randbedingungen für $\delta n(y)$ (der ' bedeutet die Ableitung nach y):

$$\begin{aligned} \delta n'' + \frac{1}{y_d} \delta n' - \frac{1}{L^2} \delta n &= 0, \\ \delta n' + \frac{1}{y_d} (n_i + \delta n) + \frac{1}{L_s} \delta n &= 0 \text{ für } y = +\frac{b}{2}, \\ \delta n' + \frac{1}{y_d} (n_i + \delta n) - \frac{1}{L_S} \delta n &= 0 \text{ für } y = -\frac{b}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

mit

$$L = \sqrt{D\tau}, L_s = D/s, L_S = D/S. \quad (8)$$

Wir haben nun die physikalische Bedeutung der eingeführten charakteristischen Längen y_d , L und L_s zu erläutern.

a) y_d : Die Länge y_d beschreibt den Einfluß des *Lorentz-Feldes* auf die Dichteverteilung. Vernachlässigen wir jegliche Rekombination, so wirkt der Dichteanhäufung an der Anreicherungsseite nur ein Diffusionsstrom entgegen. Die Dichte der Elektron-Loch-Paare fällt dann exponentiell ins Halbleiterinnere ab. Die zu diesem exponentiellen Abfall gehörige „Diffusionslänge“ ist aber, wie man leicht zeigen kann¹, gerade gleich y_d .

b) L : Diese charakteristische Länge beschreibt den Einfluß der *Volumenrekombination* auf die Dichteverteilung. Sie ist die Diffusionslänge eines Diffusionsstromes von Elektron-Loch-Paaren (ohne Feld) in einem Eigenhalbleiter: $L = \sqrt{D\tau}$, wo D durch (4) gegeben ist.

c) L_s : Diffundiert in einem Eigenhalbleiter ein Diffusionsstrom der Diffusionslänge L gegen eine Oberfläche der Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit s , so wird er sich dort stauen, wenn s klein ist, also nicht alle ankommenden Elektron-Loch-Paare rekombinieren können. Ist dagegen s extrem groß, so werden dort mehr Teilchen rekombinieren als vom Halbleiter nach-

geliefert werden, die Dichte der überschüssigen Elektron-Loch-Paare wird so stark herabgedrückt werden. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß für $L_s = L$ gerade so viele Elektron-Loch-Paare von der Oberfläche verschluckt werden, wie aus dem Halbleiterinneren durch den unbeeinflussten Diffusionsstrom nachgeliefert werden. Die Oberfläche ersetzt also in ihrer Rekombinationsfähigkeit dann gerade einen unendlich ausgedehnten Halbleiter und der Diffusionsstrom fällt nach wie vor im Halbleiterinneren mit der Diffusionslänge L ab. Ist dagegen $L_s > L$, so stauen sich die Elektron-Loch-Paare und fließen in das Halbleiterinnere zurück; ist $L_s < L$, so fällt der Diffusionsstrom stärker als exponentiell zur Oberfläche hin ab.

Für die drei charakteristischen Größen ergeben sich für Germanium die Zimmertemperaturwerte mit $\mu_H = (3\pi/8)\mu$:

$$\begin{aligned} L &= 7,72 \sqrt{\tau} \text{ cm}, [\tau] = \text{sec}; \\ L_s &= 59,6/s \text{ cm}, [s] = \text{cm/sec}; \\ y_d &= 826,3/E_x \cdot B \text{ cm}, [E_x] = \text{V/cm}, [B] = \text{Gauß}. \end{aligned}$$

Nach diesen Bemerkungen geben wir die explizite Lösung der Diff.-Gl. (7) mit den zugehörigen Randbedingungen an:

$$\begin{aligned} n &= n_i + \delta n \\ &= n_i - C_1 \exp[-1/L_V (b/2 - y)] \\ &\quad + C_2 \exp[-1/L_A (b/2 + y)], \quad (9) \\ C_1 &= \frac{n_i}{N y_d} \left\{ \left(\frac{1}{L_V} + \frac{1}{L_S} \right) - \left(\frac{1}{L_V} - \frac{1}{L_s} \right) \exp[-b/L_A] \right\}, \\ C_2 &= \frac{n_i}{N y_d} \left\{ \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_s} \right) - \left(\frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_S} \right) \exp[-b/L_V] \right\}, \\ N &= \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_s} \right) \left(\frac{1}{L_V} + \frac{1}{L_S} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_S} \right) \left(\frac{1}{L_V} - \frac{1}{L_s} \right) \exp[-b/2 (1/L_A + 1/L_V)], \end{aligned} \quad (10)$$

mit

$$\frac{1}{L_{A,V}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{y_d^2} + \frac{4}{L^2}} \pm \frac{1}{y_d} \right); \quad (11)$$

L_A bzw. L_V ist also die durch das Lorentz-Feld verkleinerte bzw. vergrößerte Diffusionslänge⁴ L .

Diskussion der Dichteverteilung: Aus Gl. (9) erkennt man folgenden Verlauf der Dichteverteilung der Elektron-Loch-Paare in der y -Richtung: Durch die gekreuzten Felder werden die Elektron-Loch-Paare an der Oberfläche bei $-b/2$ angereichert, während auf der anderen Seite $(+b/2)$ eine Verarmung entsteht. Die Dichteabweichungen durch Anreicherung bzw. Verarmung werden durch Exponentialfunktionen mit „Diffusionslängen“ L_A und L_V beschrieben. Zur genaueren Diskussion nehmen wir zunächst an, daß die Breite des Halbleiters in der y -Richtung sehr groß sei. Dann wird

die Anreicherung an der einen Seite lediglich durch das dritte Glied auf der rechten Seite der Gl. (9) beschrieben, die Verarmung auf der anderen Seite lediglich durch das zweite Glied. Die beiden Glieder nehmen im Grenzfall b gegen ∞ folgende Form an:

δn (Anreicherung)

$$= \frac{n_i}{y_d} \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_S} - \frac{1}{y_d} \right)^{-1} \exp \left[-1/L_A (b/2 + y) \right],$$

δn (Verarmung)

$$= -\frac{n_i}{y_d} \left(\frac{1}{L_V} + \frac{1}{L_S} + \frac{1}{y_d} \right)^{-1} \exp \left[-1/L_V (b/2 - y) \right]. \quad (12)$$

Wir betrachten zunächst die *Anreicherungsseite*: Die Dichteanhäufung fällt exponentiell ins Halbleiterinnere hin ab. Die „effektive Diffusionslänge“ L_A nähert sich für große Felder dem Wert y_d , für große Volumenrekombination dagegen dem Wert L . Die jeweils kleinere der beiden charakteristischen Längen setzt sich also durch. Die Größe der Dichteabweichung an der Oberfläche wird bestimmt durch L , L_S und y_d . Für sehr große (Volumen- oder Oberflächen-) Rekombination und für sehr kleine Felder wird $\delta n = 0$. Die Gleichgewichtsdichte bleibt also erhalten (Abb. 1 a).

Ähnliches gilt auf der *Verarmungsseite* (Abb. 1 b): Die hier maßgebende effektive Diffusionslänge nähert sich für große Volumenrekombination dem Wert L , für sehr große Felder dagegen dem Wert ∞ . Das heißt, daß für große Felder die Verarmung sich sehr weit in das Halbleiterinnere hinein erstreckt. Der Randwert wird wieder durch L , L_S und y_d bestimmt, und die Verarmung verschwindet in den gleichen Fällen wie die Anreicherung. Überall setzt sich die kleinere der Diffusionslängen durch.

Ist die Dicke des Halbleiters so klein (oder sind die Felder so hoch oder die Rekombination so schwach), daß sich die Vorgänge an den beiden Oberflächen gegenseitig beeinflussen, so stellt sich die Dichteverteilung nach Gl. (9) als Überlagerung der Gleichgewichtsverteilung und der beiden exponentiellen Abweichungen dar. Die Verhältnisse lassen sich aber ähnlich wie im oben geschilderten Grenzfall übersehen (Abb. 1 c). In dieser Abbildung ist die Dichteabweichung für die gleichen Parameter wie in Abb. 1 a und b nur für den Fall $b = L$ angegeben. Für große Felder wird sich die Verarmung weit in das Halbleiterinnere hinein erstrecken. Es ist dann möglich, den größten Teil des Halbleiterinneren von Elektron-Loch-Paaren

zu entblößen. Unterstützt wird dieser Fall durch kleine Volumenrekombination, kleine Oberflächenrekombination auf der Verarmungsseite und große Oberflächenrekombination auf der Anreicherungsseite. Umgekehrt wird die Verarmung weitgehend gegenüber der Anreicherung an Bedeutung verlieren, wenn man an der Verarmungsseite die Oberflächenrekombination groß macht (dann werden

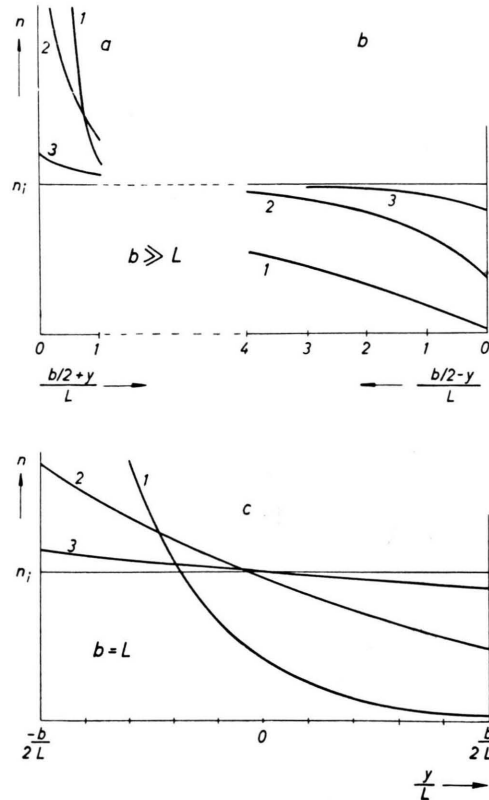


Abb. 1. Dichteverteilung n der Elektron-Loch-Paare in der y -Richtung. a) $b \gg L$, Anreicherungsseite, b) $b \gg L$, Verarmungsseite, c) $b = L$.

Die Kurven gelten für folgende Parameterwerte: $s = S = 0$ (Keine Oberflächenrekombination), $y_d = 0,2 L$ (Kurve 1), $= L$ (Kurve 2), $= 5 L$ (Kurve 3).

viele Paare nachgeliefert) und an der Anreicherungsseite klein (dann rekombinieren nur wenig Paare). Wir kommen auf diesen Fall noch ausführlich zurück. Daß diese Extremfälle in der Abb. 1 c nicht stark zur Geltung kommen, liegt an der Wahl der Oberflächenrekombination, die dort der Einfachheit halber gleich Null angenommen wurde.

Wir beschließen die Diskussion der Dichteverteilung mit einer Bemerkung zur *Definition der magnetischen Sperrschicht*:

Wir betrachten zunächst wieder den Fall sehr großer Dicke des Halbleiters. Durch den Einfluß des Magnetfeldes wird hier an der Verarmungsseite eine kleinere Elektron-Loch-Paardichte vorhanden sein als ohne Magnetfeld. Definiert man nun als Dicke dieser Verarmungsschicht (magnetischen Sperrschicht)

$$\eta = -\frac{1}{n_i} \int_{-b/2}^{+b/2} \delta n_{(\text{Verarmung})} dy, \quad (13)$$

so ergibt sich nach (12) für η der Ausdruck:

$$\eta = \frac{L_V}{1 + y_d/L_V + y_d/L_s}. \quad (14)$$

Sorgt man noch dafür, daß an der anderen Oberfläche keine Anreicherung auftritt (was durch $S \rightarrow \infty$ erreicht ist), so ändert sich der Leitwert des Halbleiters:

$$G = G_0 - \Delta G = \sigma_i (b - \eta), \quad \Delta G = \sigma_i \eta. \quad (15)$$

Für große Felder (y_d klein gegen die anderen Längen) wird

$$\eta \approx L_V \approx \frac{y_d}{L^2} = \mu_p \mu_n \frac{\mu_{nH} + \mu_{pH}}{\mu_n + \mu_p} \tau E_x B. \quad (16)$$

$$\lambda(z, g, w, W) = 1 - \frac{2z \sqrt{1+z^2} [(1-r) \cosh g \sqrt{1+z^2} - e^{gz} + r e^{-gz}] + z(1+r) \sinh g \sqrt{1+z^2}}{g \sqrt{1+z^2} (1+r) \cosh g \sqrt{1+z^2} + \sinh g \sqrt{1+z^2} [z(1-r) + 1/W + w]}. \quad (18)$$

Hier haben wir nicht die in (9) auftretenden charakteristischen Längen beibehalten, sondern sie durch neue Parameter ersetzt. Während für die Diskussion der Dichteverteilung die charakteristischen Längen direkte physikalische Bedeutung besaßen, kommt es jetzt auf das Verhältnis dieser Längen zueinander an. Die in (18) benutzten Parameter sind

$$\begin{aligned} z &= L/2 y_d = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{kT} \mu \right)^{1/2} (\mu_{nH} + \mu_{pH}) \sqrt{\tau} B E_x, \\ w &= L/L_s = \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{\tau} \cdot s, \quad W = L/L_s = \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{\tau} \cdot S, \\ g &= b/L = \frac{b}{\sqrt{D} \tau} \quad \text{und} \quad r = w/W = s/S. \end{aligned} \quad (19)$$

Für Germanium bei Zimmertemperatur nehmen diese Parameter die folgenden Werte an, wenn man E_x in V/cm, B in Gauss, τ in sec, s in cm/sec und b in cm einsetzt:

$$\begin{aligned} z &= 4,67 \cdot 10^{-3} E_x B \sqrt{\tau}, \quad w = 0,13 s \sqrt{\tau}, \\ g &= 0,13 b \sqrt{\tau}, \quad W = 0,13 S \sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Aus (18) folgt sofort, daß für verschwindende Oberflächenrekombination (s, S und damit w, W

Für kleine Breite des Halbleiters verliert der Begriff der Dicke der magnetischen Sperrschicht seinen Sinn. Man kann natürlich auch hier formal die Definition (13) benutzen. Der Halbleiter wird dann (jedenfalls bei hohen Feldern) weitgehend von Elektron-Loch-Paaren leergeäumt, und η nähert sich dem Wert b . Hierauf gehen wir im nächsten Abschnitt näher ein.

4. Strom-Spannungs-Kennlinie

Nach der Diskussion der Dichteverteilung der Elektron-Loch-Paare im Halbleiterinneren wollen wir jetzt die Frage behandeln, wie groß das Integral über die Dichteverteilung und damit die mittlere Leitfähigkeit $\bar{\sigma}_B$ des Halbleiters in der x -Richtung ist. Wir führen die Funktion λ ein, definiert durch:

$$\lambda = \frac{1}{b n_i} \int_{-b/2}^{+b/2} n dy = \frac{\bar{\sigma}_B}{\sigma_i}. \quad (17)$$

Für diese ergibt sich durch Integration von (9) der Ausdruck:

gleich 0) $\lambda = 1$ wird, d. h. es tritt keine Änderung der mittleren Leitfähigkeit auf. Nur bei endlicher Oberflächenrekombination weicht λ von dem Wert 1 ab. Dieses Ergebnis ist aber an die Wahl eines *linearen* Gesetzes für die Volumenrekombination gebunden.

Neben der Funktion λ , die nach (17) das Verhältnis der mittleren Leitfähigkeit $\bar{\sigma}_B$ im Magnetfeld zur Leitfähigkeit σ_i ohne Magnetfeld liefert, interessiert noch die Funktion λz , die ersichtlich proportional der mittleren Stromdichte \bar{i}_B in der x -Richtung ist. Es gilt:

$$\bar{i}_B = \bar{\sigma}_B E_x = \lambda \sigma_i E_x = \alpha \lambda z \quad (20)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{E_x \sigma_i}{z} = 0,214 \cdot 10^3 \frac{\sigma_i}{B \sqrt{\tau}} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2} \quad \text{für Ge,}$$

wenn σ_i in $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, B in Gauss und τ in sec eingesetzt werden. α hängt also nicht von E_x ab. λz als Funktion von z entspricht der Strom-Spannungs-Kennlinie; denn λz ist nach (20) proportional dem Strom in der x -Richtung, und z ist nach (19) proportional der angelegten Spannung in der x -Richtung. Wir diskutieren jetzt λz in Abhängigkeit von z :

a) *Kleine Felder*: Das Verhalten von λz für kleine z gibt Auskunft über das Maß der Krümmung der Strom-Spannungs-Kennlinie an der Stelle $z=0$. Für kleine z folgt aus (18) (Entwicklung nach Potenzen von z):

$$\lambda = 1 - A z + \dots, \quad A = \frac{2}{g} \frac{(1-r)(\cosh g - 1)}{(1+r)\cosh g + (1/W + w)\sinh g}. \quad (21)$$

Die Krümmung wird offenbar am größten, wenn A einen Maximalwert erreicht. Diesen erhält man bei festem g für die Oberflächenrekombinationskonstanten $s=0$ ($y=+b/2$), $S=\infty$ ($y=-b/2$). Das ist leicht einzusehen. Für positives Feld E_x werden die Elektron-Loch-Paare von der Oberfläche verschwindender Rekombination weggetrieben, ohne daß von dort neue Paare nachgeliefert werden können, auf die andere Seite unendlicher Rekombination werden sie hingetrieben und rekombinieren dort sofort. Für negatives Feld E_x liefert dagegen die Oberfläche $y=-b/2$ die von ihr weggetriebenen Paare sofort nach. Diese können aber an der Oberfläche $y=+b/2$ nicht rekombinieren, reichern sich also dort an. Beide Effekte (Verarmung für die positive, Anreicherung für die negative Feldrichtung) werden also maximal. Der in diesem Fall $s=0$, $S=\infty$ von g allein abhängige Faktor A erhält seinen Maximalwert für $g=1,51$. Daß bei einem bestimmten g ein Maximalwert auftritt, ist verständlich, da sowohl für b gegen 0 als auch für b gegen ∞ keine Änderung der mittleren Leitfähigkeit eintritt. Im ersten Fall, weil die Oberfläche $y=-b/2$ wegen der unendlich großen Rekombination den Wert n_i festhält, im anderen Fall, weil dann die Verarmung bzw. Anreicherung an der Oberfläche $y=+b/2$ gegen das unbeeinflusste große Halbleiterinnere zu vernachlässigen ist.

b) *Große Felder*: Für z gegen $\pm\infty$ erhält man aus (18) (Entwicklung nach Potenzen von $1/z$):

$$\lambda = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{g^2}{2} + r + g \left(\frac{1}{W} + w \right) \right) \frac{1}{z} + \dots \quad \text{für } z \rightarrow +\infty,$$

$$\lambda = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{g^2}{2} + \frac{1}{r} + g \left(W + \frac{1}{w} \right) \right) \frac{1}{|z|} + \dots \quad \text{für } z \rightarrow -\infty; \quad (22)$$

λ nähert sich also für unendlich hohe positive wie negative Felder E_x dem Wert 0, der Halbleiter wird völlig von Elektronen entblößt. Dies gilt nicht mehr für beide Feldrichtungen gleichzeitig, wenn w oder W verschwindet oder unendlich wird.

Wichtiger ist die aus (22) folgende Aussage, daß λz , also auch der Strom, einem Sättigungswert für $z \rightarrow \pm\infty$ bei endlichen, von 0 verschiedenen w und W zustrebt. Wir betrachten zunächst den Fall gleicher Oberflächenrekombination ($w=W$, $r=1$). Man sieht sofort, daß (18) und (22) symmetrisch in z werden, λz wird also eine ungerade Funktion in z . Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer solchen Anordnung ist in Abb. 2 angegeben. Gezeichnet

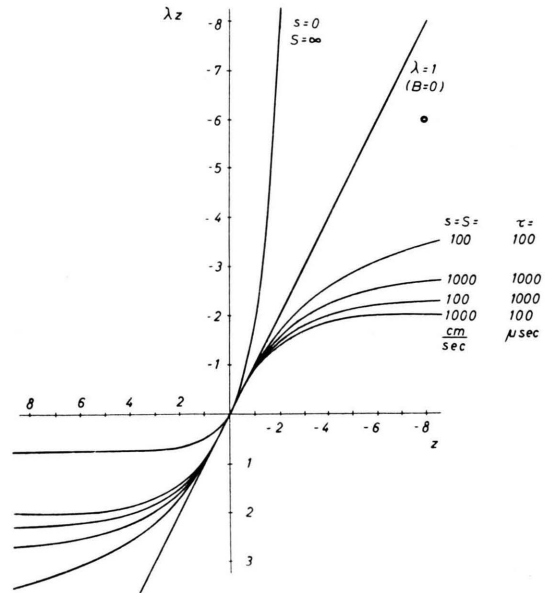


Abb. 2. Strom-Spannungs-Kennlinien der magnetischen Sperrschicht. Aufgetragen ist $\lambda \cdot z$ (proportional der Stromdichte) als Funktion von z (proportional der Spannung) [vgl. Gl. (20) und (19)]. Die vier unteren Kurven gelten für $s=S$ (symmetrischer Fall) mit den angegebenen Parameterwerten für s und τ . Die obere Kurve gilt für $s=0$, $S=\infty$ (optimaler Gleichrichter). Ferner ist die „Ohmsche Gerade“ ($B=0$) mit eingezeichnet. Die Breite b des Halbleiters ist immer gleich L .

sind die Kennlinien für Volumenlebensdauern 100 und 1000 μ sec und die Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten 100 und 1000 cm/sec. Man erkennt das zunächst merkwürdig erscheinende Resultat, daß für $\tau=1000 \mu$ sec die Kennlinie mit der kleineren Oberflächenrekombination den kleineren Sättigungsstrom besitzt, für $\tau=100 \mu$ sec dagegen die Kennlinie mit der größeren Oberflächenrekombination. Dies läßt sich an Hand der Gl. (22) verifizieren. Man erhält den minimalen Sättigungsstrom bei festem g , wenn $w=W=1$ wird. Bei gegebener Volumenrekombination ist es also zur Erzielung möglichst kleiner Sättigungs-

ströme nicht erforderlich, die Oberflächenrekombination möglichst klein zu machen, sondern sie so der Volumenrekombination anzupassen, daß $L_s = L$ wird. Unter dieser Bedingung ergibt sich aus (22), daß $g=2$ zu wählen ist, um die kleinstmögliche mittlere Stromdichte im Sättigungsbereich zu erhalten.

Im Grenzfall $s=0$ ($y=+b/2$), $S=\infty$ ($y=-b/2$) erhält man nach (22) wegen $r=0$, $w=0$, $1/W=0$ den minimalen Sättigungsstrom für $z>0$, für $z<0$ dagegen den maximalen (die Sättigung wird erst im Unendlichen erreicht), festes g vorausgesetzt. Man erreicht also optimale Gleichrichtung bei gegebenem g . In Abb. 2 ist die Kennlinie einer solchen Anordnung (wieder $g=1$) mit eingezeichnet. Dieser Fall liegt bei Ge praktisch bereits bei den experimentell erreichbaren Werten: $s=50$, $S=10000$ cm/sec vor. Auch hier finden wir ein Optimum für die Breite b des Halbleiters. Nach (22) wird der λz -Wert in Sperrrichtung im Sättigungsgebiet ($z \rightarrow +\infty$) gleich:

$$\lambda z|_{z \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{g^2}{2} \right). \quad (23)$$

Die optimale Breite des Halbleiters zur Erzielung möglichst kleiner mittlerer Stromdichten \bar{i}_B im Sperrbereich wird demnach erreicht für $g=\sqrt{2}$, d. h. für $b=\sqrt{2}L$. In Abb. 3 sind einige Kennlinien für verschiedene Parameterwerte g aufgetragen (nämlich für $g=5\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/5$, das entspricht im Ge mit $\tau=1000 \mu\text{sec}$ den Breiten $b=17,5$, $3,5$, $0,7$ mm). Die Größe der mittleren Stromdichte des Sperrstromes gewinnt man aus (23) und (20), sie wird für $g=\sqrt{2}$ gleich $\alpha/\sqrt{2}$.

Wir stellen noch einmal zusammen:

- 1) $s=S$: Minimale Stromdichte im Sättigungsbereich für $L_s=L$, (d. h. $s=\sqrt{D/\tau}$) und $g=b/L=2$.
- 2) $s=0$, $S=\infty$: Maximales Richtverhältnis (gleichzeitig minimale Stromdichte in Sperrrichtung und maximale Stromdichte in Flußrichtung) für $g=\sqrt{2}$ bei hohen Feldern, $g=1,51$ bei kleinen Feldern.

5. Magnetische Sperrschicht unter dem Einfluß von Lichteinstrahlung

Wird auf eine Oberfläche Licht aufgestrahlt, so werden dort Elektron-Loch-Paare erzeugt. Liegt die bestrahlte Oberfläche auf der Verarmungsseite, so wird die Verarmung dadurch ganz oder teilweise aufgehoben.

Ist i_L der bei $y=-b/2$ in den Halbleiter eindringende Photonenstrom, und fordert man, daß jedes absorbierte Photon ein Elektron-Loch-Paar erzeugt, so wird die Diffusionsgl. (1) im stationären Fall, wenn κ der Absorptionskoeffizient des Halbleiters ist:

$$\text{div } \vec{j}_n = \text{div } \vec{j}_p = -U + \kappa i_L \exp[-\kappa(b/2 - y)]. \quad (24)$$

Wir nehmen im weiteren an, daß das Licht bereits in der Oberfläche absorbiert wird. Diese Annahme ist bei Germanium gerechtfertigt, da der Absorptionskoeffizient für gewöhnliches Licht von der Größenordnung 10^4 cm^{-1} ist, und somit auffallendes Licht bereits in einer Schicht von einigen μ absorbiert wird.

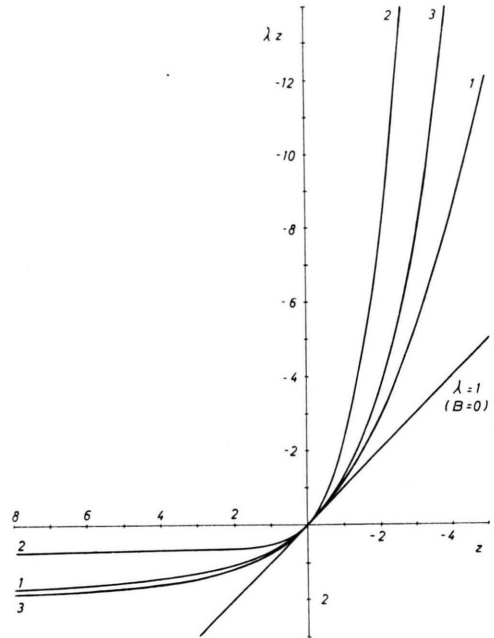


Abb. 3. Gleichrichtercharakteristiken für den Fall $s=0$, $S=\infty$. Abszisse und Ordinate wie Abb. 2. Breite des Halbleiters: Kurve 1: $b=5\sqrt{2}L$; Kurve 2: $b=\sqrt{2}L$ (optimaler Fall); Kurve 3: $b=\sqrt{2}/5L$.

Dann bleiben die Diff.-Gln. (1) bzw. (7) ungeändert, und nur die Randbedingungen (5) bzw. (7) sind zu ersetzen durch

$$j_{ny} = j_{py} = \begin{cases} U_s & \text{für } y = b/2, \\ -U_s + i_L & \text{für } y = -b/2. \end{cases} \quad (25)$$

Mit Hilfe der unveränderten Gl. (7) und den neuen Randbedingungen (25) läßt sich dann der Dichteverlauf leicht berechnen. Wir gehen hier auf diesen Fall nicht näher ein. Die Lichteinstrahlung ändert nur die Rekombinationsfähigkeit der bestrahlten Oberfläche und kann dadurch sonst auftretende Verarmungen beseitigen. Interessant ist hier jedoch der Fall, daß E_x Null wird und die vom Licht erzeugten Elektron-Loch-Paare ohne äußeres elektrisches Feld unter dem Einfluß des Magnetfeldes diffundieren. (Photodiffusion

und Magnetodiffusion.) Dieser Fall ist aber in der Literatur ausführlich beschrieben⁵.

6. Zeitlicher Abbau der magnetischen Sperrschicht

Werden die angelegten Felder plötzlich abgeschaltet, so baut sich die Dichteerhöhung bzw. -verminderung der Elektron-Loch-Paare ab. Die für den Abbau maßgebende Zeitkonstante gewinnen wir folgendermaßen:

Gl. (3) lautet hier wegen $1/y_d = 0$ (verschwindende Felder):

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n = D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta n - \frac{\delta n}{\tau}. \quad (26)$$

Wir beschränken uns auf die Behandlung des Falles $S = \infty$ ($y = -b/2$), s endlich ($y = +b/2$). Dann lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \delta n + \frac{s}{D} \delta n &= 0 \quad \text{für } y = +b/2, \\ \delta n &= 0 \quad \text{für } y = -b/2. \end{aligned} \quad (27)$$

Setzt man für δn zur Zeit $t=0$ die Entwicklung an⁶:

$$\delta n(y, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} \sin \frac{\lambda_{\nu}}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right), \quad (28)$$

so erhält man als Lösung von (26) mit den Randbedingungen (27):

$$\begin{aligned} \delta n(y, t) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} \sin \frac{\lambda_{\nu}}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left[- \left(\frac{\lambda_{\nu}^2 D}{b^2} + \frac{1}{\tau} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Die λ_{ν} sind gegeben durch die transzendente Gleichung

$$\operatorname{tg} \lambda_{\nu} = -\alpha \lambda_{\nu} \quad \text{mit } \alpha = D/sb = 1/gw \quad [\text{s. Gl. (19)}]. \quad (30)$$

Für Ge z. B. mit $s = 100$ cm/sec, $\tau = 100$ μ sec und $g = \sqrt{2}$ wird $\alpha \approx 5,5$. Die λ_{ν} werden dann näherungsweise

$$\lambda_{\nu} = \frac{\pi}{2} (2\nu - 1). \quad (30a)$$

Das Glied mit $\nu = 1$ in der Entwicklung (29), das wir mit $\delta n_1(y, t)$ bezeichnen, klingt am langsamsten ab. Wenn die Beziehung $\lambda_1 = \pi/2$ gültig ist, so ist δn_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta n_1(y, t) &= C(y) \exp \left[- \left(\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau} \right) t \right] \\ \text{mit } 1/\tau_b &= \pi^2 D/4b^2 \approx 2D/b^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Für den zeitlichen Abbau der Sperrschicht ist also das reziproke Mittel zweier Zeitkonstanten maßgebend, von denen die erste (τ_b) zum Dichteaussgleich durch Diffusion und die zweite (τ) zum Dichteaussgleich durch Rekombination bzw. Erzeugung gehört⁷.

7. Zeitlicher Aufbau der magnetischen Sperrschicht

Die zeitabhängige partielle Diff.-Gl. für den Aufbau der magnetischen Sperrschicht beim Einschalten der Felder lautet [siehe (3), mit $D/y_d = 2zD/L$]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n = D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta n + 2z \frac{D}{L} \frac{\partial}{\partial y} \delta n - \frac{\delta n}{\tau} \quad (32)$$

mit den Randbedingungen im Grenzfall $s = 0$ ($y = +b/2$), $S = \infty$ ($y = -b/2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \delta n + \frac{2z}{L} (n_i + \delta n) &= 0 \quad \text{für } y = +b/2 \quad (t \geq 0), \\ \delta n &= 0 \quad \text{für } y = -b/2 \quad (t \geq 0), \\ \delta n &= 0 \quad \text{für } t = 0 \quad (-b/2 \leq y \leq +b/2). \end{aligned} \quad (33)$$

Wir beschränken uns hier auf die Behandlung des Falles kleiner eingeschalteter Felder, genauer gesagt, wir berechnen nur die 1. Näherung von δn in BE_x , die wir mit δn_1 bezeichnen. Diff.-Gl. und Randbedingungen für δn_1 lauten:

$$D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta n_1 - \frac{\partial}{\partial t} \delta n_1 - \frac{\delta n_1}{\tau} = 0; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \delta n_1 + \frac{2z}{L} n_i &= 0 \quad \text{für } y = +b/2, \\ \delta n_1 &= 0 \quad \text{für } y = -b/2, \\ \delta n_1 &= 0 \quad \text{für } t = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Zur Lösung der Diff.-Gl. (34) mit Randbedingungen (35) ist es bequem, die folgenden neuen Veränderlichen einzuführen, nachdem man noch die Oberflächen $y = -b/2$, $y = +b/2$ nach $y = 0$, $y = b$ verlegt hat: $u = \delta n_1/n_i$, $T = t/\tau$ und $Y = y/L$. Dann erhält man an Stelle von (34) und (35):

$$M(u) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} u - \frac{\partial}{\partial T} u - u = 0 \quad (36)$$

⁵ T. S. Moss, L. Pincherle u. A. M. Woodward, Proc. Phys. Soc., Lond. B 66, 743 [1953]; P. Aigrain u. H. Buillard, C. R. Acad. Sci., Paris 236, 595 und 672 [1953].

⁶ Anharmonische Fourier-Analyse, siehe z. B. A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik Bd. VI, S. 77 ff.

⁷ Diese Zeitabhängigkeit tritt allgemein auf, wenn Dichteabweichungen durch Diffusion und Rekombination gleichzeitig zeitlich abklingen, vgl. z. B. W. Shockley, Electrons and Holes in Semiconductors, S. 320 ff., für ein ähnliches Problem.

mit
$$\frac{\partial}{\partial Y} u + 2z = 0 \quad \text{für } Y = g \quad (T \geq 0),$$

$$u = 0 \quad \text{für } Y = 0 \quad (T \geq 0), \quad (37)$$

$$u = 0 \quad \text{für } T = 0 \quad (0 \leq Y \leq g).$$

Die zu (36) adjungierte Diff.-Gl. ist:

$$N(v) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} v + \frac{\partial}{\partial T} v - v = 0. \quad (38)$$

Kennt man die der Gl. (38) genügende Greensche Funktion $V(Y, T)$ mit den Eigenschaften:

$$\frac{\partial V}{\partial Y} \Big|_{Y=g} = 0; \quad V \Big|_{Y=0} = 0,$$

so ist u an der Stelle Y_0, T_0 nach dem Greenschen Satz gegeben durch

$$u(Y_0, T_0) = -2z \int_0^{T_0} V(g, T) dT. \quad (39)$$

Wir können hier nicht näher darauf eingehen, wie man die Greensche Funktion gewinnt. Es sei dazu auf die

Randwertaufgaben der Wärmeleitung verwiesen⁸. Im Unterschied zur Wärmeleitungsgleichung tritt in (36) und (38) aber u bzw. v selbst auf. Das bedingt einen zusätzlichen Faktor $\exp(T - T_0)$ in der Greenschen Funktion V gegenüber der entsprechenden Greenschen Funktion der Wärmeleitungsgleichung. Damit ergibt sich (ϑ ist die elliptische Thetafunktion)

$$V(Y, T) = \frac{1}{4g} e^{-(T_0 - T)} \cdot \left\{ \vartheta \left(\frac{Y - Y_0}{4g} \middle| \varrho \right) - \vartheta \left(\frac{Y + Y_0}{4g} \middle| \varrho \right) + \vartheta \left(\frac{Y + Y_0 - 2g}{4g} \middle| \varrho \right) - \vartheta \left(\frac{Y - Y_0 - 2g}{4g} \middle| \varrho \right) \right\} \quad (40)$$

mit

$$\varrho = i \frac{\pi}{4} \frac{T_0 - T}{g^2}. \quad (41)$$

Da uns kleine T interessieren, wenden wir auf (40) die Transformationsformel der ϑ -Funktion an⁸. Aus (40) entsteht dann, wenn man für die ϑ -Funktion die Reihenentwicklung einsetzt:

$$V(g, T) = \frac{e^{-T}}{\sqrt{\pi} T} \cdot \left\{ \exp \left(-\frac{4g^2 Y_1^2}{T} \right) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{4g^2 n^2}{T} \right) \cos \left(i \frac{8g^2 Y_1}{T} n \right) \right] - \exp \left(-\frac{4g^2 Y_2^2}{T} \right) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{4g^2 n^2}{T} \right) \cos \left(i \frac{8g^2 Y_2}{T} n \right) \right] \right\} \quad (42)$$

mit

$$Y_1 = \frac{1}{4} (1 - Y_0'), \quad Y_2 = \frac{1}{4} (1 + Y_0'), \quad Y_0' = Y_0/g. \quad (43)$$

Ist $Y_0' = 0$, so wird $V = 0$, wie es sein muß.

Unter den Annahmen $T < 1$, $g \geq \sqrt{2}$ sind die Glieder mit $n \geq 2$ in der Reihenentwicklung (42) ohne weiteres gegen 1 vernachlässigbar. Dann wird

$$u(Y_0', T_0) = -\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} \frac{e^{-T}}{\sqrt{T}} \cdot (e^{-\alpha_1^2/T} - e^{-\alpha_2^2/T} + e^{-\alpha_3^2/T} - e^{-\alpha_4^2/T}) dT \quad (44)$$

$$\text{mit } \alpha_1 = \frac{1}{2} g (1 - Y_0'), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} g (1 + Y_0'),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} g (3 + Y_0'), \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} g (3 - Y_0'). \quad (45)$$

Wertet man die Integrale aus unter Vernachlässigung des Faktors e^{-T} , was für kleine T zulässig ist, so gewinnt man als Endresultat nach Wiedereinführung der ursprünglichen Veränderlichen δn_1 , y und t :

$$\delta n_1(Y_0', T_0) = -2z n_i \cdot \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{T_0} (e^{-\alpha_1^2/T_0} - e^{-\alpha_2^2/T_0} + e^{-\alpha_3^2/T_0} - e^{-\alpha_4^2/T_0}) - 2 \left[\alpha_1 \psi \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{T_0}} \right) - \alpha_2 \psi \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{T_0}} \right) + \alpha_3 \psi \left(\frac{\alpha_3}{\sqrt{T_0}} \right) - \alpha_4 \psi \left(\frac{\alpha_4}{\sqrt{T_0}} \right) \right] \right\}. \quad (46)$$

Hierin ist $\psi = 1 - \Phi$, Φ das Fehlerintegral, die α_i sind durch (45) gegeben, Y_0' und T_0 durch

$$Y_0' = y_0/b, \quad T_0 = t_0/\tau. \quad (47)$$

Zum Vergleich sei die stationäre Lösung von (34) mit den Randbedingungen (35) angegeben:

$$\delta n_1(Y_0') = -2z n_i \frac{\sinh g Y_0'}{\cosh g}. \quad (48)$$

In Abb. 4 haben wir $\delta n_1/2z n_i$ bei gegebenem $g = 2$ für eine Reihe von Parameterwerten $T_0 = t_0/\tau$ über $Y_0' = y_0/b$ aufgetragen. (Für $T_0 = 0,6$ wird der Funktionswert in Wirklichkeit absolut genommen kleiner sein, da sich der Faktor e^{-T} unter dem Integral bereits bemerkbar macht.) Man sieht, daß für $T_0 = 0,6$, d. h. $t_0 = 0,6 \tau$, die Sperrschicht (bzw. Dichteerhöhung) bereits nahezu vollständig aufgebaut ist.

Zu beachten ist, daß unsere Ergebnisse entsprechend den gemachten Voraussetzungen nur im Grenzfalle kleiner angelegter Felder (genauer $z \ll 1$) gültig sind. Bei größeren Feldern (größeren z) darf das Lorentz-Glied $(2zD/L)(\partial/\partial y)\delta n$ in der Diff.-Gl. (32) nicht mehr neben Diffusions- und Rekombinationsglied $(D(\partial^2/\partial y^2)\delta n$ bzw. $-\delta n/\tau)$ ver-

⁸ A. Sommerfeld⁶, Bd. VI, S. 75 ff.

nachlässigt werden. Der Aufbau der Sperrschicht wird dementsprechend in kürzerer Zeit erfolgen. τ ist als obere Grenze für die (feldabhängige) Aufbauzeit anzusehen, welche für $z \rightarrow 0$ asymptotisch erreicht wird.

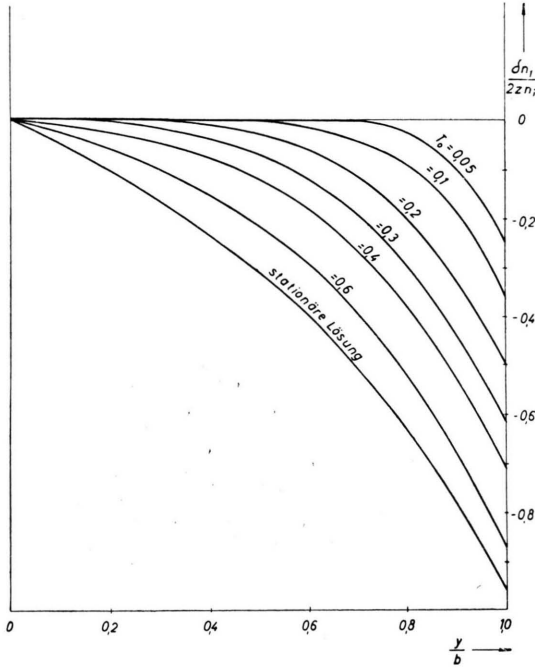


Abb. 4. Zeitlicher Aufbau der magnetischen Sperrschicht. Aufgetragen ist $\delta n_i / 2 z n_i$ über y/b für verschiedene Parameterwerte $T_0 = t_0 / \tau$ sowie die stationäre Lösung, vgl. Gl. (46) und (48). Parameterwerte: $s = 0$, $S = \infty$, $b = 2L$, Oberflächen hier bei $y = 0$, $y = b$.

8. Frequenz-Verhalten der magnetischen Sperrschicht

Wir untersuchen das Frequenzverhalten wieder nur an dem wichtigen Grenzfall $s = 0$ ($y = +b/2$), $S = \infty$ ($y = -b/2$). Setzt man für das angelegte elektrische Wechselfeld (das Magnetfeld B ist statisch angenommen):

$$E_x = E_1 \cos \omega t, \quad (49)$$

so lautet die zeitabhängige Diff.-Gl. (3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n = D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta n + 2 z_1 \frac{D}{L} \cos \omega t \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta n - \frac{\delta n}{\tau} \quad (50)$$

[z_1 aus (19) mit E_1 an Stelle E_x]. Dazu kommen die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \delta n + \frac{2 z_1}{L} \cos \omega t (n_i + \delta n) &= 0 & \text{für } y = +b/2, \\ \delta n &= 0 & \text{für } y = -b/2. \end{aligned} \quad (51)$$

Wir beschränken uns ferner auf kleine Wechselamplituden E_1 und entwickeln δn nach Potenzen von $E_1 B$. Für die erste Näherung in $E_1 B$ können wir dann in komplexer Form ansetzen:

$$\delta n_1 = A(y) e^{i \omega t}. \quad (52)$$

Wir gehen nicht auf die Durchrechnung ein, sondern geben sofort das Ergebnis für das Leitfähigkeitsverhältnis λ_1 [vgl. (17)] an:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{b n_i} \int_{-b/2}^{+b/2} A(y) e^{i \omega t} dy \right\} \\ &= 1 + \operatorname{Re} \left\{ -\frac{2 z_1}{g} \frac{e^{i \omega t}}{1 + i \omega \tau} \left(1 - \frac{1}{\cosh g \sqrt{1 + i \omega \tau}} \right) \right\} \\ &= 1 + S_1 \cos \omega t + S_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (53)$$

mit

$$S_1 = -\frac{2 z_1}{g} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \varphi \cos \chi - \omega \tau \sinh \varphi \sin \chi}{\cosh^2 \varphi - \sin^2 \chi} \right\},$$

$$S_2 = -\frac{2 z_1}{g} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \varphi \cos \chi + (1/\omega \tau) \sinh \varphi \sin \chi}{\cosh^2 \varphi - \sin^2 \chi} \right\},$$

$$\varphi = \frac{g}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} + 1)^{1/2},$$

$$\chi = \frac{g}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 1)^{1/2}. \quad (54)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ geht λ_1 über in den Ausdruck für den quasistationären Fall [Gl. (21) mit $s = 0$, $S = \infty$, E_x aus (49)]

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2 z_1}{g} \left(1 - \frac{1}{\cosh g} \right) \cos \omega t, \quad (55)$$

und für $\omega \rightarrow \infty$ wird $\lambda_1 = 1$, d. h. es treten keine Leitfähigkeitsänderungen mehr auf. Für die Diskussion des Frequenzverhaltens von λ_1 betrachten wir drei Fälle:

a) $b \gg L$ ($g \gg 1$): Dann sind die zweiten Glieder in den geschweiften Klammern von S_1 und S_2 zu vernachlässigen gegen 1, und man erhält näherungsweise

$$S_1 = -\frac{2 z_1}{g} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_\tau)^2}, \quad S_2 = -\frac{2 z_1}{g} \frac{\omega/\omega_\tau}{1 + (\omega/\omega_\tau)^2} \quad (56)$$

mit

$$\omega_\tau = 1/\tau. \quad (57)$$

Ist $\omega \ll \omega_\tau$ („kritische Frequenz“), so wird S_1 angenähert gleich S_{10} , wo S_{10} der quasistationäre Wert von S_1 für $g \gg 1$ ist, und S_2 verschwindet. Für $\omega = \omega_\tau$ wird $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} S_{10}$.

b) $b \ll L$ ($g \ll 1$): Entwickelt man (54) für $\varphi \ll 1$, $\chi \ll 1$ nach Potenzen von φ und χ , so ergibt sich, daß S_1 und S_2 in erster Näherung gleich ihren quasistationären Werten S_{10} bzw. 0 werden. Die Bedingung $\varphi \ll 1$, $\chi \ll 1$ ist aber äquivalent mit

$$\omega \ll \omega_b \text{ mit } \omega_b = 2 D/b^2. \quad (58)$$

Für $\omega = \omega_b$ werden wieder S_1 und S_2 angenähert gleich $\frac{1}{2} S_{10}$. Jetzt spielt also ω_b und nicht ω_r die Rolle der kritischen Frequenz.

c) $b \approx L$. Hier betrachten wir speziell den optimalen Gleichrichterfall $g = \sqrt{2}$. Dann wird gerade $\omega_b = \omega_r$. Der Verlauf von S_1 und S_2 ist in Abb. 5 aufgetragen, und zwar sind gezeichnet die Funktionen S_1/S_{10} und S_2/S_{10} in Abhängigkeit von $\omega\tau$ ($S_{10} = -2z_1/g$). Man erkennt, daß die „kritische Frequenz“, für die $S_1 = S_2 \approx \frac{1}{2} S_{10}$ wird, ungefähr den Wert $2/\tau = \omega_r + \omega_b$ besitzt.

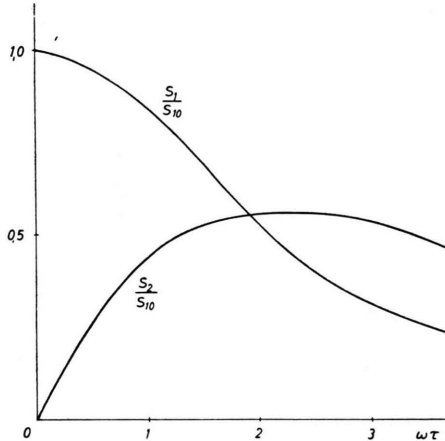


Abb. 5. Frequenzverhalten der magnetischen Sperrschicht. Abhängigkeit der Amplituden (S_1/S_{10} , S_2/S_{10}) [s. Gl. (53), mit $S_{10} = -2z_1/g$] von $\omega\tau$. Parameterwerte: $s = 0$, $S = \infty$, $b = \sqrt{2} L$.

Diskussion: Durch das angelegte Wechselfeld wird periodisch die Sperrschicht aufgebaut, wieder abgebaut, eine Dichteerhöhung aufgebaut und wieder abgebaut. Bei kleinen Frequenzen können die Elektron-Loch-Paare dem Wechselfeld schnell genug folgen, und die Dichteverteilung entspricht in jedem Zeitpunkt der stationären Verteilung bei der momentanen Elongation des Feldes. Bei höheren Frequenzen dagegen wird die Sperrschicht bzw. Dichteerhöhung nicht mehr voll ausgebildet und Auf- und Abbau hinken dem Felde nach, da die den Dichteaussgleich bewirkenden Vorgänge der Diffusion und Rekombination nicht schnell genug nachfolgen können. Bei extrem hohen Frequenzen

tritt überhaupt keine Dichteabweichung mehr auf. Die sich in den beiden Grenzfällen $g \gg 1$ und $g \ll 1$ ergebenden kritischen Frequenzen sind unmittelbar verständlich. Damit die Sperrschicht in jedem Augenblick ihren dem momentanen Feldwert entsprechenden Stationärwert annimmt, muß die Zeitkonstante des Auf- bzw. Abbaus der Sperrschicht klein gegen die Periode des Wechselfeldes sein. Betrachten wir speziell den Abbau, so heißt das nach (31) für große Breiten b des Halbleiters, wo der Abbau hauptsächlich durch Volumenrekombination erfolgt: ω muß klein gegen $1/\tau = \omega_r$ sein, für kleine Breiten b dagegen, wo der Abbau vornehmlich durch Diffusion erfolgt: ω muß klein gegen $1/\tau_b = \omega_b$ sein.

Anhang

1. Einfluß des Abweichens von der Eigenleitung auf den Sperrschichteffekt

Ist $n_0 \neq p_0$ ($\neq n_i$), so läßt sich die Theorie der magnetischen Sperrschicht nicht mehr so einfach wie bisher durchführen, da n verschieden von p wird (trotz der weiterhin als gültig angenommenen Bedingung $\delta n = \delta p$). Der Einfluß des Abweichens von der Eigenleitung auf den Sperrschichteffekt läßt sich aber leicht für die beiden Grenzfälle kleiner und großer Felder angeben.

Die Teilchen-Stromdichte in y -Richtung der Elektron-Loch-Paare ergibt sich aus (2) durch Elimination von E_y zu

$$j_y = - \frac{\mu_n \mu_p}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0} \left\{ B E_x (\mu_n + \mu_p) n p + \frac{k T}{e} (n + p) \delta n' \right\}. \quad (A1.1)$$

Das Leitfähigkeitsverhältnis λ wird, wie wir ohne Rechnung mitteilen, in 1. Näherung in $E_x B$

$$\lambda = 1 - \text{const}/\sigma^2, \quad \sigma = e (\mu_n n_0 + \mu_p p_0). \quad (A1.2)$$

Aus (A1.2) erkennt man, daß die Leitfähigkeitsänderung der Probe für kleine Felder am größten wird (B , E_x , τ sind als fest betrachtet), wenn die Leitfähigkeit $\sigma = e (\mu_n n_0 + \mu_p p_0)$ der Halbleiterprobe ihren Minimalwert erreicht (für $n_0 = \sqrt{\mu_n/\mu_p} \cdot n_i$, $p_0 = \sqrt{\mu_p/\mu_n} \cdot n_i$).

Eine Ausräumung sämtlicher Elektron-Loch-Paare aus dem Halbleiterinneren durch unendlich hohe Felder und damit ein Sättigungsstrom in x -Richtung kann offenbar nur dann erreicht werden, wenn die Probe genau eigenleitend ist. Denn wegen $\delta n = \delta p$ (Neutralitätsbedingung beim Fehlen von Haftstellen) können z.B. im Falle $n_0 > p_0$ günstigstenfalls nur p_0 Elektron-Loch-Paare in der Volumeneinheit ausgeräumt werden, so daß die übrigbleibenden $(n_0 - p_0)$ Elektronen zu einer Stromdichte $i_x = e \mu_n (n_0 - p_0) E_x$ Anlaß geben.

Während also bei kleinen Feldern das Optimum zur Erzielung größter Leitfähigkeitsänderungen erreicht wird, wenn die Leitfähigkeit der Probe minimal wird (d.h. $n_0 = \sqrt{\mu_n/\mu_p} \cdot n_i$, $p_0 = \sqrt{\mu_p/\mu_n} \cdot n_i$), muß man zur Er-

zielung einer völligen Ausräumung von Elektron-Loch-Paaren durch hohe angelegte Felder und eines Sättigungsstromes in x -Richtung strenge Erfüllung der Bedingung der Eigenleitung der Halbleiterprobe fordern (also $n_0 = p_0 = n_i$).

2. Einfluß von Haftstellen auf den Sperrschichteffekt

Im allgemeinen wird man aus der Neutralitätsbedingung nicht folgern dürfen $\delta n = \delta p$, da sich stets Störstellen, z.B. Haftstellen, im Halbleiterinneren befinden, welche Elektronen oder Löcher eingefangen halten. Die Neutralitätsbedingung nimmt dann die Form an:

$$\delta n + \delta n_t = \delta p, \quad (\text{A } 2.1)$$

wo n_t die Dichte der Elektronen ist, die in den Haftstellen sitzen, und δn_t die Abweichung von der thermischen Gleichgewichtsdichte n_{t0} bedeutet. Berechnet man unter stationären Bedingungen δn_t (abhängig von δn , δp)⁹, so gewinnt man aus (A2.1) durch Elimination von δn_t für nicht zu große Dichteabweichungen δn , δp die Beziehung:

$$\delta n = \kappa \delta p. \quad (\text{A } 2.2)$$

Wir verzichten darauf, die Gestalt der Konstanten κ anzugeben. Es zeigt sich, daß κ angenähert gleich 1 wird, wenn die Dichte der Haftstellen klein gegen n_i ist; ist das nicht der Fall, so wird im allgemeinen κ merklich verschieden von 1 sein. Die Theorie der magnetischen Sperrschicht im Stationärfall läßt sich mit Hilfe von (A2.2) leicht durchführen, wir verzichten hier jedoch darauf.

Es ist aber offensichtlich, daß die charakteristischen Sperrschichteffekte durch Haftstellen verschlechtert werden bzw. gar nicht auftreten können. So muß auch bei den höchsten angelegten Feldern, welche eine Ausräumung von Elektron-Loch-Paaren bewirken, immer eine Dichte von freien Löchern (freien Elektronen) zurückbleiben, welche gleich der Dichte der in den Haftstellen sitzenden Elektronen n_{t0} (eingefangenen Löcher $p_{t0} = -n_{t0}$) ist und deren Ladung kompensiert. Dadurch wird wieder, genau wie bei der im Anhang 1 behandelten Abweichung von der Eigenleitung, die Ausbildung eines Sättigungsstromes in der x -Richtung unmöglich gemacht. (Hierbei ist angenommen, daß keine Entleerung der eingefangenen Elektronen n_{t0} aus den Haftstellen ins Leitungsband eintritt.)

3. Einfluß der Abweichungen vom linearen Rekombinationsgesetz

Wir hatten in (6) für die Volumen-Rekombinationsquote U den Ansatz $U = \delta n / \tau$ gemacht und die Theorie der magnetischen Sperrschicht unter der Annahme entwickelt, daß τ unabhängig von der Dichteabweichung δn sei. Dieses lineare Rekombinationsgesetz gilt aber zunächst nur für verschwindend kleine δn , und es soll jetzt untersucht werden, inwieweit unser Vorgehen berechtigt ist. Nach ¹⁰ erhält man bei Rekombi-

nation über Rekombinationszentren im Eigenhalbleiter das Gesetz:

$$U = \frac{\delta n}{\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \frac{1 + (1/2 n_i) \delta n}{1 + a \delta n}, \quad (\text{A } 3.1)$$

worin τ_0 die von uns benutzte konstante Lebensdauer ist. Die Konstante a (siehe¹⁰) hängt von der Termelage der Rekombinationszentren und dem Verhältnis der mittleren Einfangwahrscheinlichkeit eines Elektrons in die leeren Zentren zur Einfangwahrscheinlichkeit eines Lochs in die mit Elektronen gefüllten Zentren ab (das Verhältnis sei β genannt). a ist also durch die Natur des Rekombinationszentrums gegeben. Theoretisch kann a alle Werte zwischen 0 und $1/n_i$ annehmen, im allgemeinen wird jedoch a den Wert $1/2 n_i$ nicht überschreiten, da β sich nicht allzusehr von 1 unterscheiden wird. Fällt der Term des Rekombinationszentrums mit der Fermi-Kante (im Eigenhalbleiter) zusammen und ist β außerdem gleich 1, so wird $a = 1/2 n_i$; dann gilt also das lineare Rekombinationsgesetz streng.

Im Grenzfall $a = 0$ erhält man:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{2 n_i} \delta n \right), \quad \text{also } U = \frac{1}{2 n_i \tau_0} (n^2 - n_i^2). \quad (\text{A } 3.2)$$

Es sei angemerkt, daß für Cu und Ni als Rekombinationszentren im Ge a ungefähr gleich $1/10 n_i$ wird¹¹. In

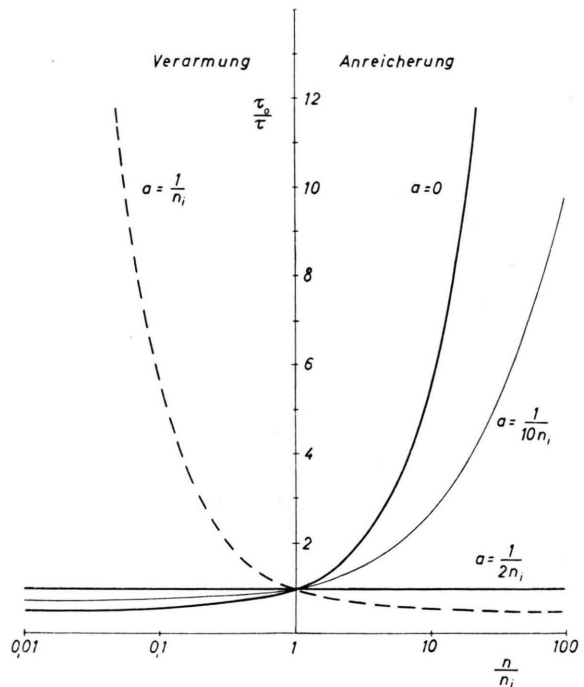


Abb. 6. Verlauf der reziproken Lebensdauer $1/\tau$ in Abhängigkeit von der Dichte n der Elektron-Loch-Paare in Einheiten $1/\tau_0$. Die Parameterwerte für a (Gl. A3.1) sind in der Figur angegeben.

⁹ H. Y. Fan, Phys. Rev. **92**, 1424 [1953].

¹⁰ W. Shockley u. W. T. Read, Phys. Rev. **87**, 839 [1952].

¹¹ J. A. Burton, G. W. Hull, F. J. Morin u. J. C. Severiens, J. Phys. Chem. **57**, 853 [1953].

Abb. 6 sind die Funktionen $1/\tau$ über n/n_i für die verschiedenen besprochenen a -Werte aufgetragen.

Man sieht, daß für $a \leq 1/2 n_i$ im Falle von *Dichteverarmung* unsere Annahme eines konstanten $1/\tau$ näherungsweise richtig ist, und zwar gilt das um so besser, je näher a bei $1/2 n_i$ liegt. Jedoch wächst $1/\tau$ bei *Dichteüberhöhung* schnell mit n/n_i an. Danach ist es fraglich, ob unsere berechneten Dichteüberhöhungen für kleine Oberflächen-Rekombinationsgeschwindigkeiten s und hohe Felder den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Denn es ergeben sich nahe der Oberfläche $y = +b/2$ extrem große Dichteüberhöhungen, für welche nach Abb. 6 die Annahme eines linearen Volumen-Rekombinationsgesetzes auch nicht mehr annähernd gerechtfertigt ist. Eine wesentliche Verbesserung der Theorie dürfte in diesem Falle erreicht werden, wenn an Stelle eines linearen *Oberflächen-Rekom-*

binationsgesetzes, wie wir es angesetzt haben, ein quadratisches angenommen wird (also $U_s = (s/2 n_i)(n^2 - n_i^2)$). Dieses wird für große Dichteüberhöhungen an der Anreicherungsseite $y = +b/2$ der physikalischen Wirklichkeit besser angemessen sein. Auf diese Weise wird die Dichteüberhöhung bei $y = +b/2$ stark herabgedrückt und ein lineares Volumen-Rekombinationsgesetz erhält nach Abb. 6 wieder approximative Gültigkeit. Wir müssen aber hier darauf verzichten, die Theorie des Sperrschichteffektes unter diesen Annahmen (quadratisches Oberflächen- und lineares Volumen-Rekombinationsgesetz, wodurch lediglich die Randbedingungen der Diff.-Gl. (7) modifiziert werden) neu zu entwickeln. Qualitativ läßt sich sofort sagen, daß die Strom-Spannungs-Kennlinien in Sperrichtung sich kaum ändern werden, daß aber die Flußströme weniger stark ansteigen werden.

Magnetische Sperrschichten in Germanium II

Von E. WEISSHAAR*

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke AG Erlangen

(Z. Naturforschg. **10a**, 488—495 [1955]; eingegangen am 4. Juni 1955)

Es werden experimentell gemessene Strom-Spannungskennlinien symmetrischer und unsymmetrischer magnetischer Sperrschichten¹ aufgezeigt und deren Abweichungen von dem theoretisch zu erwartenden Verlauf diskutiert. Insbesondere ergibt sich, daß das Ausbleiben eines Sättigungsstromes auf den Störstellengehalt des verwendeten Germaniums zurückzuführen ist. Weiterhin wird über Messungen des zeitlichen Auf- und Abbaus, sowie des Frequenzverhaltens berichtet. Für den Fall kleiner angelegter Felder konnte in allen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen erzielt werden.

I. Stationärer Fall der magnetischen Sperrschicht

1. Impulsmethode zur Kennlinienmessung

In einer früheren Arbeit² wurden bereits oszillographisch aufgenommene Strom-Spannungslinien an magnetischen Sperrschichten in Germanium mitgeteilt. Es war damals darauf hingewiesen worden, daß durch die Eigenerwärmung der Probe bei Feldstärken > 10 V/cm eine Verfälschung des Meßergebnisses eintritt. Da eine Kühlung des Präparates durch Einbettung oder Umspülen mit einer Kühlflüssigkeit wegen der möglichen Beeinflussung der sehr empfindlichen geätzten Oberfläche des Germaniums zunächst ungünstig erschien, wurde zur Kennlinienmessung eine Impulsmethode angewandt. Das Prinzip der Methode zeigt Abb. 1. Der Strom für die Probe wird von

einem Impulsgenerator geliefert. Den Einsatz des Impulses bestimmt ein Synchronisationssignal, das vom Oszillographen bei Beginn der Zeitablenkung ausgesandt wird. Der Impulsgenerator gestattet eine Verzögerung des Meßimpulses gegenüber dem Synchronisationsimpuls, so daß auch der Impulsanstieg auf dem Schirm des Braunschen Rohres

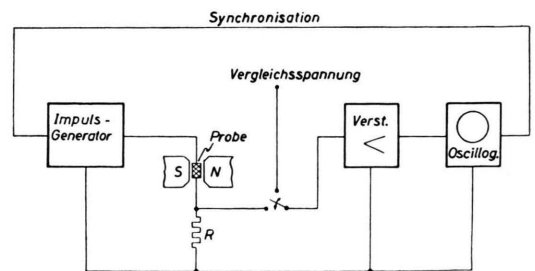


Abb. 1. Blockschaltbild der Impulsapparatur zur Messung der Strom-Spannungs-Kennlinien.

* Auszug aus Dissertation, Freiburg i. Br.

¹ Der Begriff der magnetischen Sperrschicht wird erstmals definiert in: H. Welker, Z. Naturforschg. **6a**, 4, 184 [1951].

² E. Weißhaar u. H. Welker, Z. Naturforschg. **8a**, 681 [1953].